

Algèbre linéaire

Examen

Partie commune

Automne 2024

Énoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

Notations

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème composante de \mathbf{x} .
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- \mathbb{P}_n désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
- Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire euclidien est défini par $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.
- Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la norme euclidienne est définie par $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La droite de régression linéaire pour les points $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(5, 0)$ est

$y = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}x.$ $y = 2 - \frac{3}{8}x.$ $y = \frac{9}{2} - \frac{5}{2}x.$ $y = \frac{12}{7} - \frac{5}{14}x.$

Question 2 : Soit $T: \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = b_{12} - (b_{11} + b_{22})t + b_{21}t^2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{1, 1 + t^2, t + t^2\}$$

des bases de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et \mathbb{P}_2 respectivement. La matrice A associée à T relative à la base \mathcal{B} de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et la base \mathcal{C} de \mathbb{P}_2 , telle que $[T(B)]_{\mathcal{C}} = A[B]_{\mathcal{B}}$ pour tout $B \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, satisfait

$a_{12} = -6.$ $a_{12} = 3.$ $a_{12} = 2.$ $a_{12} = -4.$

Question 3 : Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ une base de \mathbb{R}^3 et soit $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ la base de \mathbb{R}^3 formée des vecteurs

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3.$$

Soit P la matrice de changement de base telle que $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = P[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$p_{23} = 1.$ $p_{23} = 2.$ $p_{23} = -\frac{2}{3}.$ $p_{23} = 0.$

Question 4 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 3 & 1 \\ 2\pi & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

$b_{24} = 3.$ $b_{21} = 7.$ $b_{23} = 5.$ $b_{22} = 1.$

Question 5 : Soit a un nombre réel. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} ax_1 & + & x_3 & = & 1 \\ & ax_2 & & + & x_4 = 0 \\ x_1 & & + & ax_3 & = 1 \\ & x_2 & & + & ax_4 = 1 \\ x_1 & & + & x_3 & = a \end{cases}$$

possède exactement une solution si et seulement si

$a \in \{-2, 1\}.$ $a = -2.$ $a \in \{-1, 1\}.$ $a \in \{-1, 1, -2\}.$

Question 6 : Soit A une matrice de taille 2×2 telle que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ respectivement. Alors la matrice inverse A^{-1} est

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -18 & -11 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 7 : Soit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - 5z \\ -2x + y + 7z \\ x - 2z \end{pmatrix}.$$

Alors

- le vecteur \mathbf{v} n'est ni dans $\text{Ker}(T)$, ni dans $\text{Img}(T)$.
- le vecteur \mathbf{v} est dans $\text{Ker}(T)$, mais pas dans $\text{Img}(T)$.
- le vecteur \mathbf{v} est dans $\text{Img}(T)$ et dans $\text{Ker}(T)$.
- le vecteur \mathbf{v} est dans $\text{Img}(T)$, mais pas dans $\text{Ker}(T)$.

Question 8 : Soient

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

trois vecteurs de \mathbb{R}^5 et soit $W = \text{Vect}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ fournit une base orthogonale $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de W telle que

$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Question 9 : Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sont

- $-2, -1$ et 2 . -1 et 2 . $-1, 1$ et 2 . $-2, -1$ et 1 .

Question 10 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 . La deuxième coordonnée

de la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in W$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ de W est

- $-\frac{3}{4}$. $\frac{1}{4}$. -2 . 1 .

Question 11 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

$x_4 = 1.$

$x_4 = \frac{1}{2}.$

$x_4 = -2.$

$x_4 = -\frac{5}{2}.$

Question 12 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$\det(B) = \alpha^2(\alpha - 1)^2.$

$\det(B) = \alpha(\alpha + 2)(\alpha - 1)^2.$

$\det(B) = \alpha^2(\alpha^2 - 4).$

$\det(B) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha^2 - 4).$

Question 13 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Alors une solution au sens des moindres carrés $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfait

$\hat{x}_1 = -2.$

$\hat{x}_1 = 2.$

$\hat{x}_1 = -1.$

$\hat{x}_1 = 1.$

Question 14 : Soit W le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par

$$W = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}.$$

Soit $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ une base de W . Alors la projection orthogonale de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur W est

$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 4 \\ 6 \\ 7/2 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}.$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 15: L'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_n : p(1)p(2) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{P}_n .

VRAI FAUX

Question 16: Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs tels que leurs projections orthogonales sur le sous-espace W sont égales, alors le vecteur $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ est orthogonal à W .

VRAI FAUX

Question 17: Soient A et B deux matrices de taille 3×3 . Si $\det(A) = 2$, alors

$$\det(BA^{-1}B) = \frac{1}{2} \det(B)^2.$$

VRAI FAUX

Question 18: Soient V et W deux espaces vectoriels et soient $T, S: V \rightarrow W$ deux applications linéaires. Si $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(S)$, alors $\text{Img}(T) = \text{Img}(S)$.

VRAI FAUX

Question 19: Si $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ est telle que $\det(A) = 0$, alors $\lambda = 0$ est une valeur propre de A .

VRAI FAUX

Question 20: Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que $\text{Img}(A) = \mathbb{R}^m$, alors pour tout choix de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une solution unique.

VRAI FAUX

Question 21: Soit V un espace vectoriel et soit $T: V \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. Si $v_1, v_2, v_3 \in V$ sont tels que

$$T(v_1) = 2, \quad T(v_2) = 3 \quad \text{et} \quad T(v_3) = 1,$$

alors $v_1 - v_2 + v_3$ est dans $\text{Ker}(T)$.

VRAI FAUX

Question 22: Soient $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs orthonormaux, avec $0 < k < n$.

Si $W = \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ et $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur dans W^\perp , alors $\text{Vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ est un sous-espace de \mathbb{R}^n de dimension $k + 1$.

VRAI FAUX

Question 23: Soit V un espace vectoriel et soient v_1, v_2, v_3 trois vecteurs de V . Si l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3\}$ est linéairement indépendant, alors l'ensemble $\{v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_2 - v_3\}$ est linéairement indépendant.

VRAI FAUX

Question 24: Le nombre de lignes non nulles dans la forme échelonnée réduite d'une matrice est égal à son rang.

VRAI FAUX

Question 25: Soient A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times m$. Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

VRAI FAUX

Question 26: Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Si A et B sont des matrices symétriques, alors $A + B$ est diagonalisable.

VRAI FAUX

Question 27: Soit A une matrice carrée de taille 3×3 . Si $p(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda)$ est le polynôme caractéristique de A , alors $\text{rang}(A) = 2$.

VRAI FAUX

Question 28: Si $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont telles que $(A + B)^T = A + B$, alors A et B sont symétriques.

VRAI FAUX

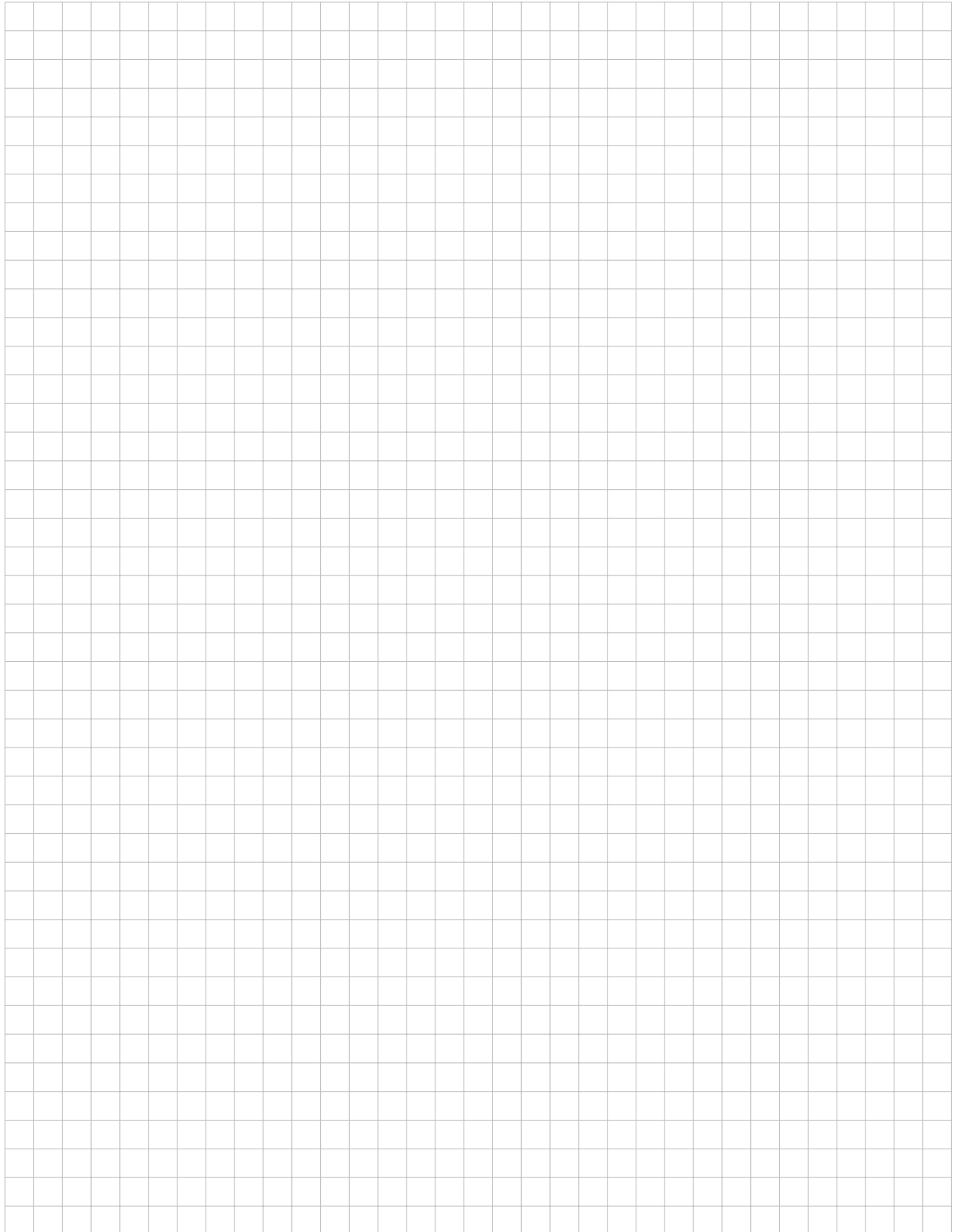
Question 30: Cette question est notée sur 3 points.

₀ ₁ ₂ ₃

Réservé au correcteur

Soit A une matrice de taille $n \times n$ telle que $A^3 = I_n$.

- (a) Déterminer $\text{Ker}(A)$.
- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Déterminer la valeur de λ .



Question 31 : Cette question est notée sur 4 points.

₀ ₁ ₂ ₃ ₄

Réservé au correcteur

Soit $A = \begin{pmatrix} 2025 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2025 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2025 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2025 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ et soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

- (a) Montrer que v est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre correspondante.
- (b) Donner une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2024$.
- (c) Donner une matrice diagonale D semblable à la matrice A .

